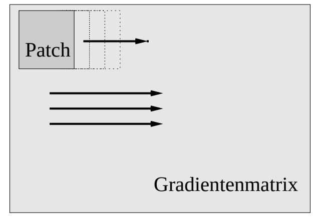
Strukturtensor - Merkblatt

Pierre Bayerl (1999), korrigierte Version (2003)



Ziel: Die Approximation der Gradientenrichtung in einer bestimmten Bildregion und Berechnung einer Maßzahl für die Exaktheit dieser Richtung.
Damit können dann 1-dimensionale Strukturen (Kanten) von 2-dimensionalen Strukturen (z.B. Ecken) unterschieden werden.

- Sei $\vec{u}$ die approximierte Gradientenrichtung für einen Patch und $\vec{v}$ ein Vektor mit $\vec{v} \perp \vec{u}$. Des weiteren gelte $|\vec{v}| = |\vec{u}| = 1$.
- Seien innerhalb eines Patches P der Breite N die Gardientenvektoren $(\nabla I_{ij})_{i,j \in P}$ zusammengefasst in einer $N^2 \times 2-$Matrix $G := (\nabla I_{00} \ldots \nabla I_{NN})^\top$.

Gesucht: Approximationsvektor $\vec{u}$ mit

$$\sum_{i,j \in P} \underbrace{(\nabla I_{ij} \cdot \vec{u})}_{\text{Skalarprodukt}}{}^2 \quad \longrightarrow \quad \text{max} \tag{1}$$

$(\nabla I_{ij} \cdot \vec{u})^2$ wird hierbei besonder groß, wenn $\vec{u} \parallel \nabla I_{ij}$ und besonder klein (Null), wenn $\vec{u} \perp \nabla I_{ij}$.
$\Rightarrow$ Liegt also $\vec{u}$ möglichst parallel zu allen Gradienten im Patch, wird diese Maßzahl maximal.

Vorschau: Hat man nun ein solchen Vektor $\vec{u}$ gefunden, so ergeben sich folgende Beobachtungen für die Werte λ_1, λ_2

$$\lambda_1 \quad := \quad \sum_{i,j \in P} (\nabla I_{ij} \cdot \vec{u})^2 \tag{2}$$

$$\lambda_2 \quad := \quad \sum_{i,j \in P} (\nabla I_{ij} \cdot \vec{v})^2 \tag{3}$$

(Es gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da sonst $\vec{v}$ den Gradienten besser approximiert als $\vec{u}$)

- $\lambda_1 \gg 0$ und $\lambda_2 \approx 0$:
  Die Approximation durch $\vec{u}$ ist nahezu perfekt, da $\vec{v}$ wegen $\lambda_2 \approx 0$ zu allen Gradientenvektoren fast senkrecht steht. Daher liegt in diesem Patch eine **Kante/Rampe** (eine 1-dimensionale Struktur mit quasi uniformer Gradientenrichtung) vor.
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \gg 0$:
  Die Approximation ist relativ schlecht, da viele Gradienten nicht parallel zu $\vec{u}$ liegen. Dies folgert aus der Tatsache daß $\vec{v} \perp \vec{u}$ und $\lambda_2 \gg 0$, also viele Gradienten nicht senkrecht zu $\vec{v}$ stehen.
  Es liegt hier somit eine 2-dimensionale Struktur, z.B. eine **Ecke** vor.
- $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 0$:
  Es liegt keine Struktur vor, es handelt sich hier um eine **homogene Region**.

Berechnung von $\vec{u}$ über den Strukturtensor: Der Stukturtensor S ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} S &:= G \cdot G^\top = \begin{bmatrix} \sum G_{i1}^2 & \sum G_{i1}G_{i2} \\ \sum G_{i2}G_{i1} & \sum G_{i2}^2 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i,j\in P} \nabla I_{ij}^\top \nabla I_{ij} \end{aligned} \tag{4}$$

Betrachten wir nun folgende Umformung des zu maximierenden Termes (1).

$$\begin{aligned} \sum_{i,j\in P} (\nabla I_{ij} \cdot \vec{u})^2 &= \sum \vec{u}^\top \nabla I_{ij}^\top \nabla I_{ij} \vec{u} \\ &= \vec{u}^\top (\sum \nabla I_{ij}^\top \nabla I_{ij}) \vec{u} \\ &= \vec{u}^\top S \vec{u} \end{aligned} \tag{5}$$

Verknüpft man nun (5) mit (2) und (3), so sieht man, daß λ_1 und λ_2 genau dann Eigenwerte von S dastellen, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die zugehörigen Eigenvektoren sind.

$$\begin{aligned} \vec{u}^\top S \vec{u} &= \lambda_1 \\ S\vec{u} &= \lambda_1 \vec{u} \end{aligned} \tag{6}$$

(S symetrisch und reel $\Rightarrow$ Eigenwerte sind reel und die Eigenvektoren existieren)

<u>Bleibt zu zeigen</u> daß die Wahl des Eigenvektors (zum größerem λ gehörend, oBdA λ_1) für $\vec{u}$ den Term (1) maximiert.
Im folgenden seinen die tatsächlichen Eigenvektoren zu S $\vec{\tilde{u}}$ und $\vec{\tilde{v}}$. Dann kann $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{\tilde{u}}$ und $\vec{\tilde{v}}$ geschrieben werden ($\vec{\tilde{u}} \perp \vec{\tilde{v}}$):

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{\tilde{u}} + \alpha_2 \vec{\tilde{v}} \tag{7}$$

Setzt man nun (7) in (5) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i,j\in P} (\nabla I_{ij} \cdot \vec{u})^2 &= \vec{u}^\top S \vec{u} \\ &= (\alpha_1 \vec{\tilde{u}} + \alpha_2 \vec{\tilde{v}})^\top S (\alpha_1 \vec{\tilde{u}} + \alpha_2 \vec{\tilde{v}}) \\ &= (\alpha_1 \vec{\tilde{u}}^\top + \alpha_2 \vec{\tilde{v}}^\top) \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{\tilde{u}} & \vec{\tilde{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tilde{u}}^\top \\ \vec{\tilde{v}}^\top \end{bmatrix}}_{\text{Eigenwertzerlegung von } S,\ |\vec{\tilde{u}}| = |\vec{\tilde{v}}| = 1} (\alpha_1 \vec{\tilde{u}} + \alpha_2 \vec{\tilde{v}}) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \vec{\tilde{u}}^\top \vec{\tilde{u}} & \alpha_2 \vec{\tilde{v}}^\top \vec{\tilde{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \vec{\tilde{u}}^\top \vec{\tilde{u}} \\ \alpha_2 \vec{\tilde{v}}^\top \vec{\tilde{v}} \end{bmatrix} \\ &\ \text{Beachte daß } \vec{\tilde{u}}^\top \vec{\tilde{v}} = 0 \text{, da } \vec{\tilde{u}} \perp \vec{\tilde{v}} \text{ und daß } \vec{\tilde{u}}^\top \vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{v}}^\top \vec{\tilde{v}} = 1 \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Aus (8) wird ersichtlich daß die Wahl von $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ (wegen $\lambda_1 \geq \lambda_2$) den Term (1) maximiert $\Rightarrow \vec{u} = \vec{\tilde{u}}$.

■

Berechnung des Tensors und der Eigenwerte:
Häufig werden bei der Bestimmung des Tensors die verschiedenen Elemente innerhalb des betrachteten Patches verschieden gewichtet:

$$S = \sum_{i,j \in P} w_{ij} \nabla I_{ij}^{\top} w_{ij} \nabla I_{ij} \tag{9}$$

w kann z.B. ein Boxfilter sein ($w =$ const, dann entspricht S der oben gegeben definition) oder z.B. ein Binomialfilter. Die Summation kann über eine (separierte) Faltung des Gradienten mit dem Filter w realisiert werden.

Beispiel zur Berechnung der Werte für λ_1 und λ_2:

```
% Ix,Iy : Gradientkomponenten (mit Sobel berechnet)
% Nun Tensorkomponenten berechnen: [XX XY; XY YY]
YY = Iy.^2;
XX = Ix.^2;
XY = Ix.*Iy;

% Faltung = (gewichtete) Aufsummation in einem Bereich:
PatchMask = ones(3,3); % alternativ: Gauss/Binomialmaske hier verwenden

XX=conv2(XX,PatchMask,'same');  % Nachbarschaft ueber die Patch-Maske auf-
XY=conv2(XY,PatchMask,'same');  % summiert: Faltung (anstelle eines Box-Filters
YY=conv2(YY,PatchMask,'same');  % kann man auch einen Gaussfilter nehmen)

% Eigenwerte:
a=1;               % a,b,c: Parameter der Quadratischen
b=-XX-YY;          %  Gleichung, wird fuer die Mitternachts-
c=XX.*YY-XY.^2;    %  formel verwendet:
D= (b.*b-4*a*c); % Diskrimininaten-Matrix (immer >=0)

L1 = ( -b + sqrt(D) ) ./ (2*a); % gr. Eigenwert-Matrix
L2 = ( -b - sqrt(D) ) ./ (2*a); % kl. Eigenwert-Matrix
```

Hierbei werden die Eigenwerte fogendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} (m_{XX} - \lambda) * (m_{YY} - \lambda) - m_{XY}^2 &= 0 \\ \underbrace{\lambda^2}_{a=1} + \underbrace{(-m_{XX} - m_{YY})\lambda}_{b=-m_{XX}-m_{YY}} + \underbrace{m_{XX} m_{XY} - m_{XY}^2}_{c=m_{XX}m_{XY}-m_{XY}^2} &= 0 \end{aligned}$$