Stabilität der Diffusionsgleichung

pierre@neuro.informatik.uni-ulm.de

Diskretisierung

Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial I}{\partial x}\right) \tag{1}$$

Taylorentwicklung von I um t:

$$I(t+\Delta t) = I(t) + \Delta t\frac{\partial I}{\partial t}(t) + O\left((\Delta t)^2\right) \tag{2}$$

Approximation von $\frac{\partial I}{\partial t}$ als Vorwärtsdifferenz

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t) = \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Unter der Annahme, dass D konstant in x und t ist: (D ändert sich nur langsam in der Zeit; Örtlich kann man sich die Analyse lokal vorstellen):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial I}{\partial x}\right) &= D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ &= \frac{D}{(\Delta x)^2}\left(I(x-\Delta x) - 2I(x) + I(x+\Delta x)\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Es ergibt sich eine diskretisierte Form der PDE (Gl. 1), die FTCS Gleichung (forward time, center space):

$$\frac{1}{\Delta t}\left(I(t+\Delta t) - I(t)\right) = \frac{D}{(\Delta x)^2}\left(I(x-\Delta x) - 2I(x) + I(x+\Delta x)\right) \tag{5}$$

Lösung der Diffusionsgleichung

Als Lösung ergibt sich:

$$I(x,t) = \xi^t e^{ikx} \tag{6}$$

wobei $k \in \Re$ und $\xi = \xi(k)$.
Die Lösung lässt sich durch Einsetzen in Gleichung 1 nachprüfen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t} &= \log(\xi)\cdot\xi^k e^{ikx} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= \xi^k (ik)^2 e^{ikx} \\ \Rightarrow \xi &= e^{-k^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Konvergenz und Stabilität

Die Lösung (Gl. 6) der Diffusionsgleichung konvergiert dann, wenn

$$|\xi| \leq 1 \; \forall k \tag{8}$$

Im kontinuierlichen Fall ist diese Bedingung immer erfüllt. Der diskreten Fall wird nun diskutiert.
Einsetzen von (6) in (5) ergibt:

$$\frac{\left(\xi^{t+\Delta t} e^{ikx} - \xi^t e^{ikx}\right)}{\Delta t} = \frac{D\left(\xi^t e^{ik(x-\Delta x)} - 2\xi^t e^{ikx} + \xi^t e^{ik(x+\Delta x)}\right)}{(\Delta x)^2}$$

Dividieren durch $\xi^t e^{ikx}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}\left(\xi^{\Delta t} - 1\right) &= \frac{D}{(\Delta x)^2}(\underbrace{e^{-ik\Delta x} + e^{ik\Delta x}}_{\boxed{\begin{array}{l} = e^{\frac{-ik\Delta x}{2}} \cdot e^{\frac{-ik\Delta x}{2}} + e^{\frac{ik\Delta x}{2}} \cdot e^{\frac{ik\Delta x}{2}} \\ = (e^{\frac{-ik\Delta x}{2}} - e^{\frac{ik\Delta x}{2}})^2 + 2^{\frac{-ik\Delta x}{2} \frac{ik\Delta x}{2}} \\ = (2i\sin(\frac{-k\Delta x}{2}))^2 + 2 \\ = -4\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) + 2 \end{array}}} -2) \\
&= \frac{-4D}{(\Delta x)^2}\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) \\
\Rightarrow \xi^{\Delta t} &= 1 - \frac{4D\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Nun gilt es zu überprüfen ob $\left|\xi^{\Delta t}\right| \leq 1$ [1]:

$$\begin{aligned}
\left(\xi^{\Delta t}\right)^2 &\leq 1 \\
\Rightarrow 2\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 2\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) &\leq 1 \\
\Rightarrow (\Delta x)^2 &\geq 2D\Delta t \qquad (10)
\end{aligned}$$

Literatur

[1] B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. Numerical recipes in C. `http://www.ulib.org/webRoot/Books/Numerical_Recipes/bookcpdf.html`.

[2] B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge Univ. Press, 1988.

[1] $\xi^{\Delta t} = e^{\Delta t \log(\xi)} \leq 1 \Leftrightarrow \Delta t \log(\xi) \leq 0 \Leftrightarrow \log(\xi) \leq 0 \Leftrightarrow \xi \leq 1, \Delta t > 0$