

# Beweisen mit Semantischen Tableaux

Semantische Tableaux geben ein Beweisverfahren, mit dem ähnlich wie mit Resolution eine Formel dadurch bewiesen wird, dass ihre Negation als widersprüchlich abgeleitet wird (*proof by refutation*).

Semantische Tableaux basieren in gewisser Weise auf einer Darstellung von Formeln in disjunktiver Normalform (Resolution: konjunktive Normalform).

Es wird ein Baum konstruiert, in dem jeder Knoten mit einer Formel markiert ist. Ein Pfad von der Wurzel zu einem Blatt stellt die Konjunktion aller Formeln der Knoten entlang des Pfads dar; eine Verzweigung stellt eine Disjunktion dar.

Der Baum wird aufgebaut durch sukzessive Anwendung der *Tableau-Erweiterungsregeln*.

Ein Pfad in einem Tableau ist *abgeschlossen*, wenn entlang des Pfads sowohl  $X$  wie  $\neg X$  für eine Formel  $X$  auftreten, oder wenn  $F$  auftritt.

( $X$  muß nicht atomar sein.)

## Semantische Tableaux (2)

Ein Tableau heißt *abgeschlossen*, wenn alle seine Pfade abgeschlossen sind.

Ein *Tableau-Beweis* für eine Formel  $X$  ist ein abgeschlossenes Tableau für  $\neg X$ .

Die Auswahl der Regeln bei der Erweiterung eines Tableaus ist nichtdeterministisch.

Für aussagenlogische Tableaux kann die Auswahl etwas eingeschränkt werden:

Ein Tableau heißt *strikt*, wenn keine Formel entlang eines Pfads mehr als einmal mit einer Regel erweitert wurde.

# Tableau-Erweiterungsregeln

zunächst für Aussagenlogik:

$$\frac{\neg\neg X}{X} \quad \frac{\neg W}{F} \quad \frac{\neg F}{W}$$

für konjunktive Formeln (“ $\alpha$ -Regeln”):

$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \quad \alpha_2} \quad \frac{X \wedge Y}{X \quad Y} \quad \frac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \quad \neg Y} \quad \frac{\neg(X \Rightarrow Y)}{X \quad \neg Y}$$

für disjunktive Formeln (“ $\beta$ -Regeln”):

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \quad \frac{X \vee Y}{X \mid Y} \quad \frac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \mid \neg Y} \quad \frac{X \Rightarrow Y}{\neg X \mid Y}$$

# Tableau-Beweis: Beispiel

**Beispiel** eines aussagenlogischen Tableau-Beweises für

$$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

$$(1) \quad \neg[(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))]$$

$$(2) \quad (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \quad (\alpha \text{ aus } 1)$$

$$(3) \quad \neg[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)] \quad (\alpha \text{ aus } 1)$$

$$(4) \quad (P \Rightarrow Q) \quad (\alpha \text{ aus } 3)$$

$$(5) \quad \neg(P \Rightarrow R) \quad (\alpha \text{ aus } 3)$$

$$(6) \quad P \quad (\alpha \text{ aus } 5)$$

$$(7) \quad \neg R \quad (\alpha \text{ aus } 5)$$

$$(8) \quad \neg P \quad | \quad (9) \quad (Q \Rightarrow R) \quad (\beta \text{ aus } 2)$$

$$(10) \quad \neg Q \quad | \quad (11) \quad R \quad (\beta \text{ aus } 9)$$

$$(12) \quad \neg P \quad | \quad (13) \quad Q \quad (\beta \text{ aus } 4)$$

# Tableau-Erweiterungsregeln für Prädikatenlogik

- Erweiterungsregeln wie für Aussagenlogik - in den Regeln stehen  $X$  und  $Y$  dann für beliebige (prädikatenlogische) Formeln
- Zusätzlich die folgenden Regeln für die Behandlung quantifizierter Formeln:

$$\frac{\gamma}{\gamma[t]} \qquad \frac{\delta}{\delta[c]}$$

$\gamma$  ist eine universell quantifizierte Formel,  $\delta$  eine existentiell quantifizierte Formel.  
 $\gamma[t]$  und  $\delta[c]$  ergeben sich aus den folgenden Tabellen:

$\gamma$	$\gamma[t]$	$\delta$	$\delta[c]$
$\forall x. \Phi$	$\Phi[x \leftarrow t]$	$\exists x. \Phi$	$\Phi[x \leftarrow c]$
$\neg \exists x. \Phi$	$\neg \Phi[x \leftarrow t]$	$\neg \forall x. \Phi$	$\neg \Phi[x \leftarrow c]$

Hierbei sind  $t$  ein Grundterm (oder allgemeiner: ein Term, der keine Variablen enthält, die in  $\Phi$  gebunden sind) und  $c$  eine "neue" Konstante.

# Tableau-Beweis in PL1: Beispiel

*Beispiel:* Tableau-Beweis für

$$(\forall x. P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x. P(x)) \vee (\forall x. Q(x))$$

- |      |  |                   |
|------|--|-------------------|
| (1)  | $\neg[(\forall x. P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x. P(x)) \vee (\forall x. Q(x))]$ |                   |
| (2)  | $\forall x. P(x) \vee Q(x)$  | ( $\alpha$ aus 1) |
| (3)  | $\neg[(\exists x. P(x)) \vee (\forall x. Q(x))]$   | ( $\alpha$ aus 1) |
| (4)  | $\neg \exists x. P(x)$   | ( $\alpha$ aus 3) |
| (5)  | $\neg \forall x. Q(x)$   | ( $\alpha$ aus 3) |
| (6)  | $\neg Q(c)$  | ( $\delta$ aus 5) |
| (7)  | $\neg P(c)$  | ( $\gamma$ aus 4) |
| (8)  | $P(c) \vee Q(c)$   | ( $\gamma$ aus 2) |
| (9)  | $P(c)$   |                   |
| (10) | $Q(c)$   | ( $\beta$ aus 6)  |

# Tableau-Regeln mit Variablen

Statt geeignete Instanzen der  $\gamma$ - und  $\delta$ -Regeln zu “erraten”, können auch freie Variablen und Skolem-Funktionen in der Erweiterung benutzt werden.

Die folgenden Regeln ersetzen die vorher für Tableau-Beweise angegebenen  $\gamma$ - und  $\delta$ -Regeln.

## Tableau-Erweiterungsregeln mit Skolem-Funktionen und freien Variablen

$$\frac{\gamma}{\gamma[v]} \qquad \frac{\delta}{\delta[f(v_1, \dots, v_n)]}$$

Hierbei sind  $v$  eine neue Variable,  $f$  eine neue Skolem-Funktion,  $v_1, \dots, v_n$  alle bisher in dem betreffenden Zweig des Tableaus eingeführten freien Variablen.

## Tableau-Substitutionsregel:

$T$  sei ein Tableau für eine Menge  $S$  von geschlossenen Formeln,  $\sigma$  eine Substitution, die frei für  $T$  (d.h. frei für alle Formeln in  $T$ ) ist; dann ist  $\sigma(T)$  (d.h. jede Formel  $X$  in  $T$  durch  $\sigma(X)$  ersetzt) auch ein Tableau für  $S$ .

Eine elementare Substitution  $\{x \leftarrow t\}$  ist *frei für eine Formel  $P$* , wenn  $x$  in  $P$  nicht im Bindungsbereich einer Variablen  $y$  vorkommt, die auch in  $t$  vorkommt.

Eine Substitution  $\sigma$  ist frei für eine Formel  $P$ , wenn jede ihrer Elementar-Substitutionen frei für  $P$  ist.

# Tableau-Beweis in PL1: Beispiel (modifiziert)

Das erste Beispiel mit Benutzung von freien Variablen:

...			
(6)	$\neg Q(c)$		( $\delta$ aus 5)
(7)	$\neg P(v_1)$		( $\gamma$ aus 4)
(8)	$P(v_2) \vee Q(v_2)$		( $\gamma$ aus 2)
(9)	$P(v_2)$		(10) $Q(v_2)$ ( $\beta$ aus 6)

Mit der Substitution  $\sigma = \{v_1 \leftarrow c, v_2 \leftarrow c\}$  kann das Tableau geschlossen werden

## Beispiel eines Tableau-Beweises mit freien Variablen und Skolem-Funktionen:

Zu beweisen:

$$(\exists w. \forall x. R(x, w, g(x, w))) \Rightarrow (\exists w. \forall x. \exists y. R(x, w, y))$$

- (1)  $\neg[(\exists w. \forall x. R(x, w, g(x, w))) \Rightarrow (\exists w. \forall x. \exists y. R(x, w, y))]$
- (2)  $\exists w. \forall x. R(x, w, g(x, w))$  ( $\alpha$  aus 1)
- (3)  $\neg[\exists w. \forall x. \exists y. R(x, w, y)]$  ( $\alpha$  aus 1)
- (4)  $\forall x. R(x, a, g(x, a))$  ( $\delta$  aus 2)
- (5)  $\neg\forall x. \exists y. R(x, v_1, y)$  ( $\gamma$  aus 3)
- (6)  $\neg\exists y. R(b(v_1), v_1, y)$  ( $\delta$  aus 5)
- (7)  $R(v_2, a, g(v_2, a))$  ( $\gamma$  aus 4)
- (8)  $\neg R(b(v_1), v_1, v_3)$  ( $\gamma$  aus 6)

$\sigma = \{v_1 \leftarrow a, v_2 \leftarrow b(a), v_3 \leftarrow g(b(a), a)\}$  ist frei für alle Formeln im Tableau (keine rechte Seite enthält eine Variable)

daher: Die Tableau-Substitutionsregel kann mit  $\sigma$  angewendet werden; unter  $\sigma$  sind die Zeilen (7) und (8) widersprüchlich.

# Tableau-Verfahren: Eigenschaften

**Sätze** über das Tableau-Verfahren:

1. Tableau-Regeln erhalten *Erfüllbarkeit*: wenn die Wurzel-Formel eines Tableaus erfüllbar ist, dann gibt es mindestens einen Pfad im Tableau, der erfüllbar ist.
2. Eine Tableau-Formel  $G$  ist unerfüllbar genau dann, wenn ein geschlossenes Tableau für  $G$  existiert.  
(Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit des Verfahrens)

Das Verfahren kann auf unerfüllbare *Mengen* von Formeln erweitert werden.

Tableaux-Verfahren werden zunehmend auch für maschinelles Beweisen herangezogen, als Alternative zu Resolution. Wegen der relativ einfachen Modifizierbarkeit der Dekompositionsregeln werden Tableau-Verfahren insbesondere auch für andere Logiken (wie intuitionistische Logik, Modal-Logiken) entwickelt.

Literatur zum Tableau-Verfahren: insbesondere

R. M. Smullyan, *First Order Logic*, Springer-Verlag, 1968.

# Tableau-Verfahren und Resolution

Gemeinsamkeiten:

- Beweis durch Widerlegung
- ausgehend von der zu beweisenden (bzw. zu widerlegenden) Formel
- Steuerung durch Auswahl-Strategien

Unterschiede:

- Resolution setzt Transformation der Formeln in Klauselform voraus;  
Tableau-Verfahren nimmt in gewisser Weise eine Transformation während der Konstruktion des Tableau vor, d.h. Transformation ist Teil der Regeln.
- Resolution erfordert Reduktion auf leere Klausel für erfolgreichen Beweis;  
Tableau-Verfahren kann (im Prinzip) erfolgreich stoppen, ohne dass die Formel vollständig auf Atome reduziert ist.
- Es ist vermutlich einfacher, aus einem nicht weiter reduzierbaren Tableau ein Modell (und damit ein Gegenbeispiel) abzulesen, als aus einem fehlgeschlagenen Resolutionsbeweis.