Aufgabe 13-1

Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs. Zeigen Sie:

a) Jede stetige Funktion $f : D \to D$ ist monoton.

b) Wenn es in D bezüglich $\sqsubseteq_D$ keine unendlichen Ketten gibt, so ist jede monotone Funktion $f : D \to E$ stetig.

Aufgabe 13-2

Gegeben sei die Abbildung f auf dem Teilbereich $D = \{0, \ldots, 4\}$ der natürlichen Zahlen mit: $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 4$ und $4 \mapsto 4$.

a) Ist die Abbildung monoton bezüglich der üblichen Ordnung $\leq$ auf den natürlichen Zahlen? Ist sie stetig?

b) Was sind die Fixpunkte dieser Abbildung? Was ist der kleinste Fixpunkt?

Aufgabe 13-3

Es bezeichne $\mathbb{N}_\perp$ den Bereich $\mathbb{N} \cup \perp$; die zugehörige Ordnungsrelation $\sqsubseteq$ ist definiert durch

$$x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow x = y \vee x = \perp$$

Gegeben sei das Funktional $F : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ mit

$$F := \lambda f.\ \lambda m.\ \mathsf{if}\ m = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ \mathsf{if}\ m = 1\ \mathsf{then}\ f(m+2)\ \mathsf{else}\ f(m-2)$$

Berechnen Sie $F(\lambda n.\ 0)$ und $F(\lambda n.\ 1)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Fixpunkte von F sind:

- $\lambda n.\ 1$
- $\lambda n.\ \mathsf{if}\ (n\ \mathsf{mod}\ 2) = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 2$
- $\lambda n.\ \mathsf{if}\ (n\ \mathsf{mod}\ 2) = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ \perp$

Welche dieser Funktionen (wenn überhaupt) ist der kleinste Fixpunkt von F? Welche anderen Fixpunkte hat F noch? Vergleichen Sie die Fixpunkte von F nach ihrer Größe entsprechend der auf $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ induzierten punktweisen Ordnung $\sqsubseteq_{\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp}$.

Aufgabe 13-4

Die Funktion *factoo* : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert als

$$factoo(m, n) = \begin{cases} n & \text{falls } m = 0 \\ factoo(m-1, m * n) & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Geben Sie das zu dieser rekursiven Definition gehörende Funktional F an. Berechnen Sie $F^0(\bot), F^1(\bot), F^2(\bot)$ und $F^3(\bot)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $factoo(m, n) = n * fac(m)$, wobei *fac* für die übliche Fakultätsfunktion steht. Verwenden Sie dabei gewöhnliche mathematische Induktion.

c) Zeigen Sie selbiges mit Fixpunktinduktion. Die Induktion läuft hierbei über die beiden Funktionen *factoo* und *fac* gleichzeitig, unter Verwendung des oben angegebenen Funktionals F und des entsprechenden Funktionals G für *fac*. Es ist dann (für ein geeignetes Prädikat P) zu zeigen:

- $P(F^0(\bot), G^0(\bot))$
- $P(F^n(\bot), G^n(\bot)) \to P(F^{n+1}(\bot), G^{n+1}(\bot))$

Geben Sie P an und führen Sie den Beweis durch.