

Aufgabe 11-1

Mit folgendem Termersetzungssystem können arithmetische Ausdrücke teilweise vereinfacht werden.

$$\begin{array}{l|l} x * (y + z) \rightarrow (x * y) + (x * z) & 1 * x \rightarrow x \\ (x + y) * z \rightarrow (x * z) + (y * z) & x * 0 \rightarrow 0 \\ x * 1 \rightarrow x & 0 * 0 \rightarrow 0 \end{array}$$

- Beweisen Sie die Terminierung mit der rekursiven Pfadordnung (RPO).
- Versuchen Sie, obiges Termersetzungssystem zu vervollständigen.
- Welches Problem entsteht bei Verwendung der RPO, wenn man noch die Regel $(x * y) * z \rightarrow x * (y * z)$ zu obigem Termersetzungssystem hinzunimmt?

Aufgabe 11-2

Sei $>$ eine Ordnung auf Funktionssymbolen. Die *lexikographische Pfadordnung* (LPO) $>_{LPO}$ ist wie folgt definiert:

$$s \doteq f(s_1, \dots, s_m) >_{LPO} g(t_1, \dots, t_n) \doteq t$$

- gdw.
- $s_i >_{LPO} t$ oder $s_i \doteq t$ für ein i , oder
 - $f > g$ und $s >_{LPO} t_j$ für alle j , oder
 - $f = g$ und $(s_1, \dots, s_m) >_{LPO}^{lex} (t_1, \dots, t_n)$ und $s >_{LPO} t_j$ für alle j

wobei

$$(s_1, \dots, s_m) >_{LPO}^{lex} (t_1, \dots, t_n)$$

- gdw.
- $n = 0$ und $m > 0$ oder
 - $s_1 >_{LPO} t_1$ oder
 - $s_1 = t_1$ und $(s_2, \dots, s_m) >_{LPO}^{lex} (t_2, \dots, t_n)$

- Die LPO unterscheidet sich von der rekursiven Pfadordnung durch das Vergleichskriterium in der Klausel (3): Bei der LPO wird ein lexikographischer Vergleich $(s_1, \dots, s_m) >_{LPO}^{lex} (t_1, \dots, t_n)$ durchgeführt, bei der RPO ein Multimengenvergleich. Ferner enthält die dritte Regel der LPO den Zusatz $s >_{LPO} t_j$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß diese Bedingung wichtig ist. Ist diese Bedingung auch bei der RPO vorhanden?

b) Gegeben ist folgendes Termersetzungssystem für die Ackermann-Funktion:

$$\begin{aligned}ack(0, m) &\rightarrow m + 1 \\ack(n + 1, 0) &\rightarrow ack(n, 1) \\ack(n + 1, m + 1) &\rightarrow ack(n, ack(n + 1, m))\end{aligned}$$

Zeigen Sie die Termination des Termersetzungssystems mit Hilfe der LPO. Warum kann die rekursive Pfadordnung hier nicht benutzt werden?

Aufgabe 11-3

Gegeben sei folgendes Termersetzungssystem für die Gruppentheorie:

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &\rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\e \cdot x &\rightarrow x \\i(x) \cdot x &\rightarrow e\end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der lexikographischen Pfadordnung, daß dieses Termersetzungssystem terminiert.
- b) Vervollständigen Sie das Termersetzungssystem mit dem Knuth-Bendix-Verfahren.