Aufgabe 10-1

Modellieren Sie aufbauend auf das 9. Übungsblatt weitere Begriffe aus dem Bereich der Termersetzung in PVS:

a) Eine Termersetzungsregel soll als ein Paar zweier Terme dargestellt werden, ein Termersetzungssystem als eine Menge solcher Regeln. Definieren Sie dafür geeignete Typen.

b) Definieren Sie ein Prädikat `subterm_replaced(t,s1,s2) : pred[Term]`, das diejenigen Terme `t2` beschreibt, die entstehen, wenn in einem Term `t` ein Subterm `s1` durch den Term `s2` ersetzt wird: $t_2 = t_1[s_1 \leftarrow s_2]$.

c) Definieren Sie für ein Termersetzungssystem `R` die Termersetzungsrelation $\rightarrow_R$ durch ein Prädikat `reducible1(R)(t1,t2) : bool`, das Termpaare `t1` und `t2` beschreibt, sodass `t2` durch Anwendung einer Regel aus `R` *in einem Schritt* aus `t1` abgeleitet werden kann.

d) Definieren Sie den reflexiven und transitiven Abschluss $\rightarrow_R^*$ und den reflexiven, symmetrischen und transitiven Abschluss $\leftrightarrow_R^*$ von $\rightarrow_R$.

e) Definieren Sie ein Prädikat `terminating(R) : bool`, das beschreibt, wann ein Termersetzungssystem `R` terminierend ist.

f) Definieren Sie ähnliche Prädikate für Konfluenz, lokale Konfluenz und die *Church-Rosser*-Eigenschaft.

g) Definieren Sie den Begriff der *Normalform* eines Terms bezüglich eines Termersetzungssystems `R`.

h) Zeigen Sie einige Eigenschaften von Termersetzungssystemen:

- Für ein Termersetzungssystem mit der *Church-Rosser*-Eigenschaft gibt es für jeden Term höchstens eine Normalform.
- Ist das Termersetzungssystem zudem terminierend, so gibt es für jeden Term genau eine Normalform.
- Ein Termersetzungssystem besitzt genau dann die *Church-Rosser*-Eigenschaft, wenn es konfluent ist.
- Ein terminierendes Termersetzungssystem besitzt die *Church-Rosser*-Eigenschaft genau dann, wenn es lokal konfluent ist.

Bemerkung: Diese Aufgaben sind als *Anregung* zu verstehen. Es können nach Lust und Laune andere oder weitere Begriffe definiert bzw. Eigenschaften bewiesen werden.