

## Aufgabe 8-1

Für  $n, k \in \mathbb{N}$ , mit  $k \leq n$ , ist der Binomialkoeffizient wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Die wesentlichen Schwierigkeiten bei der Umsetzung dieser Definition in PVS treten im Bereich der Typisierung auf:

- Der Definitionsbereich ist durch die Bedingung  $k \leq n$  eingeschränkt.
- Bei der Division darf der Nenner selbstverständlich nicht Null sein.
- Der Binomialkoeffizient ist stets ganzzahlig, d. h. der Nenner teilt den Zähler.

Eine PVS-Funktion zur Berechnung des Binomialkoeffizienten soll daher schrittweise entwickelt werden:

a) Definieren Sie eine rekursive Funktion `factorial(n:nat) : RECURSIVE nat` zur Berechnung der Fakultätsfunktion (siehe auch Aufgabe 4-1).

- Die Fakultätsfunktion liefert immer *positive* ganze Zahlen. Formulieren und beweisen Sie ein entsprechendes `JUDGEMENT`.
- Formulieren Sie für  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Funktion `prod(m,n,f) : RECURSIVE nat`, die das Produkt der Funktionswerte von  $f$  an den Stellen  $m, m+1, m+2, \dots, n$  bildet.

Zeigen Sie:

$$k \leq n \Rightarrow \frac{n!}{k!} = \prod_{i=k+1}^n i$$

b) Definieren Sie eine Funktion `binomial` zur Berechnung des Binomialkoeffizienten. Zur Vermeidung von TCCs soll als Wertebereich von `binomial` zunächst `real` verwendet werden. Schränken Sie den Definitionsbereich für Parameter `k` geeignet ein! Zeigen Sie:

```
binomial_0_0 : FACT    binomial(0,0) = 1
binomial_n_n : FACT    binomial(n,n) = 1
binomial_n_0 : FACT    binomial(n,0) = 1

binomial_positive : LEMMA
  FORALL (k:upto(n)): binomial(n,k) > 0

binomial_cancelled : LEMMA
  FORALL (k:upto(n)):
    binomial(n,k) = prod(n-k+1,n,id) / factorial(k)
```

**Hinweis:** Manche der in der Prelude-Theorie `real_props` bewiesenen Eigenschaften der Division sind hier nützlich, z. B. `div_div2` oder `div_cancel2`.





