Aufgabe 3-1

In dieser Aufgabe soll in PVS das Konzept der transitiven Hülle einer binären Relation mit Hilfe von Funktionen und Prädikaten *höherer Stufe* definiert werden.

Den Typ einer binären Relation über einem Basistyp `T` definieren wir in PVS als:

```
T      : TYPE+
BinRel : TYPE = [T,T -> bool]
```

a) Definieren Sie in PVS ein Prädikat `transitive? : [BinRel -> bool]`, so dass `transitive?(R)` genau dann gilt, wenn `R` transitiv ist.

b) Definieren Sie ein Prädikat `<= : [BinRel,BinRel -> bool]`, so dass `R <= S` genau dann gilt, wenn `S` die Relation `R` umfasst.

c) Definieren Sie einen Operator `intersect : [[BinRel -> bool] -> BinRel]`, so dass `intersect(P)` den Schnitt aller Relationen `R` liefert, die das Prädikat `P` erfüllen.

d) Definieren Sie einen Operator `transclosure : [BinRel -> BinRel]`, so dass `transclosure(R)` die transitive Hülle der Relation `R` liefert.

Hinweis: Ein Paar (x, y) ist in der transitiven Hülle einer Relation `R` enthalten, wenn es in *allen* die Relationen , die *transitiv* sind und `R` *umfassen*, enthalten ist.

e) Zeigen Sie, dass ihre Formalisierung der transitiven Hülle tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt, nämlich (i) transitiv ist, (ii) `R` umfasst und (iii) die kleinste solche Relation ist.

Hinweis: Für die Eigenschaft (iii) kann es hilfreich sein, ein Prädikat `least? : [pred[BinRel] -> pred[BinRel]]` zu definieren, so dass `least?(P)(R)` genau dann erfüllt ist, wenn `R` die kleinste Relation ist, die `P` erfüllt.

Aufgabe 3-2

Auf der Webseite zur Vorlesung findet sich die Datei `trig.pvs`, die eine einfache Modellierung der trigonometrischen Funktionen *sin* und *cos* enthält.

Beweisen Sie die dort aufgeführten Lemmata. Zusätzlich zu den Beweisregeln aus Aufgabe **2-3** werden Sie die Regeln `(CASE)` und `(REPLACE)` (bzw. `(CASE-REPLACE)`) sowie `(LEMMA)` `(REWRITE)` und `(ASSERT)` benötigen. Nehmen Sie die Beschreibung dieser Regeln in der *PVS Kurzanleitung* zu Hilfe.

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Beweisen Sie zunächst die Lemmata `sin_2a` und `cos_2a` mit Hilfe der Axiome `sin_plus` bzw. `cos_plus`. Hinweis: $2a = a + a$.

b) Beweisen Sie `sin_0` mit Hilfe von `sin_minus`. Hinweis: $0 = 1 - 1$.

c) Beweisen Sie `sq_sin_cos_one`. Sie benötigen hier die Aussagen `cos_minus` und `cos_0`. Hinweis: $cos(a - a) = cos(0) = 1$.

d) Beweisen Sie `cos_PI2` mittels `sq_sin_cos_one`, `sin_PI2` und `zero_times3`. (Letztere Formel ist Teil der PVS-*Prelude*-Theorie.)

e) Beweisen Sie `cos_PI` und `sin_PI`. Hinweis: $PI = PI/2 + PI/2$.

f) Beweisen Sie `sin_shift` und `cos_shift` mit Hilfe der Lemmata und Axiome der Theorie `trig`.

g) (Optional – Schwierig) Beweisen Sie `exist_cos_ne_0` und `cos_0`.

Aufgabe 3-3

Gegeben sei folgende Modellierung einer Gruppe in PVS:

```
gruppe : THEORY
BEGIN

  G : TYPE+;
  e : G;   i : [G -> G];   * : [G,G -> G]

  x,y,z : VAR G

  assoziativ   : AXIOM    (x * y) * z = x * (y * z)
  linksneutral : AXIOM    e * x = x
  linksinvers  : AXIOM    i(x) * x = e

END gruppe
```

Auf der Webseite zur Vorlesung findet sich die Datei `gruppe.pvs`, in der verschiedene Gleichungen aufgelistet sind. (Diese Gleichungen entstehen bei der sogenannten *Knuth-Bendix-Vervollständigung* des durch die obigen Axiome definierten Termersetzungssystems).

Beweisen Sie mit Hilfe von PVS, dass diese Gleichungen in der Tat aus den Axiomen bzw. den anderen Regeln folgen. Benutzen Sie dazu die Beweiserregeln `(SKOLEM!)`, `(REWRITE)`, und `(CASE-REPLACE)`.

Hinweis: Die Beweise verlangen teilweise recht komplexe Termmanipulationen. In der oben erwähnten Datei `gruppe.pvs` sind die Beweise jeweils in mathematischer Notation angegeben. Versuchen Sie, diese in PVS nachzubilden.