Gentzen-Kalküle

Axiomatische Systeme ("Hilbert–Kalküle"):

- bestehen aus mehreren, recht komplexen Axiomen, und
- wenigen Schlußregel (für Aussagenlogik: nur einer, für Prädikatenlogik drei).

Probleme mit solchen Systemen:

- Beweise sind "unnatürlich": Ein Beweis entspricht wenig der Art, wie ein Mensch ihn versteht oder entwickelt.
- Beweise werden gewöhnlich ausgehend von der Zielformel geführt, also in der Rückwärts- und nicht in der Vorwärtsrichtung (Verwendung des Kalküls als "Testkalkül" und nicht als "deduktiven Kalkül"). Der Suchraum kann dabei sehr groß werden.

Ähnliches gilt für Beweisen mit Resolution.

Gentzen-Kalküle (2)

Die Kalküle von Gentzen versuchen, eine 'natürlichere' Beweiskonstruktion zu unterstützen und damit die Schwachstellen zu beheben.

Im wesentlichen zwei Kalkül-Formen:

- Kalkül des natürlichen Schließens ("N")
- Sequenzen-Kalkül ("L"), häufig als 'Gentzen-Kalkül' im eigentlichen Sinn bezeichnet.

In der Vorlesung werden wir uns im wesentlichen auf den Sequenzen-Kalkül beschränken.

Gentzen-Kalküle – Überblick

Der Kalkül des natürlichen Schließens und der Sequenzenkalkül sind eng miteinander verwandt und lassen sich (unter bestimmten Bedingungen) ineinander überführen. Gemeinsamkeiten sind:

- Wesentliche Datenstruktur ist die *Sequenz*, auf der Axiome und Regeln definiert werden.
- Form: $\Gamma \vdash \Delta$, wobei Γ der Antezedent, Δ der Sukzedent ist.
- Nur wenige bzw. überhaupt keine Axiome.
- Das Verhalten einer jeden Verknüpfung bzw. Quantors wird durch ein Regelpaar beschrieben, nicht durch die Axiome.

Gentzen-Kalküle – Überblick (2)

Grundideen für den N–Kalkül:

- Primäres Ziel: Finde Beweis für Formel F unter Annahmen Γ. Also: $\Gamma \vdash F$.
- Der Sukzedent Δ besteht aus genau einer Formel, der Antezedent Γ ist eine Formelmenge und zeichnet die Annahmen auf, die während des Beweises gemacht werden.
- Primär wird die Wirkung der Regeln auf den Sukzedent beschrieben

Grundideen für den L–Kalkül:

- Primäres Ziel: Finde Beweis für Formelmenge Δ aufgrund der Annahmen Γ. Also: $\Gamma \vdash \Delta$.
- Sukzedent und Antezedent sind beliebige Formelmengen (mit Einschränkungen; siehe unten).
- Antezedent und Sukzedent werden symmetrisch behandelt.

Gentzen-Kalküle – Terminologie

Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \vdash \Delta$ wobei Γ und Δ Multimengen von Formeln sind.

Γ heißt der *Antezedent*, Δ der *Sukzedent* der Sequenz.

Antezedent und Sukzedent können jeweils auch leer sein (weitere Einschränkungen möglich je nach Kalkül)

Multimenge: Mengen mit Mehrfachvorkommen von Elementen; z.B. $\{a, a, b\}$

Die Sequenzen $A, B \vdash C$ und $B, A \vdash C$ sind also gleich,
die Sequenzen $A, B \vdash C$ und $A, A, B \vdash C$ ungleich.

Warnung: Statt Multimengen werden oft auch einfache Mengen oder Listen verwendet; der Begriff "Gentzen-Kalküle" bezeichnet eine ganze Klasse verwandter Kalküle.

Intuitive Interpretation:

Einer Sequenz $A_1, .., A_m \vdash B_1, .., B_n$ entspricht die Aussage, daß die Implikation $A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow B_1 \vee ..B_n$ wahr ist
(bzw. daß $\neg A_1 \vee .. \vee \neg A_m \vee B_1 \vee ..B_n$ wahr ist).

Bei atomaren A_i, B_j erkennt man unschwer die Klausel-Form.

Eine Sequenz $A_1, .., A_m \vdash B_1, .., B_n$ heißt *gültig*, wenn die Formel $A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow B_1 \vee ..B_n$ unter jeder Interpretation wahr ist.

Der Sequenzen-Kalkül (Aussagenlogik)

Das einzige *Axiom* ist:

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

Strukturelle Regeln:

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\,\mathit{contr{:}L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\,\mathit{contr{:}R}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\,\mathit{cut}$$

Logische Regeln:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}\Rightarrow\mathsf{L} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathsf{R}$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}\wedge\mathsf{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\wedge\mathsf{R}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\vee\mathsf{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\vee\mathsf{R}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}\neg\mathsf{L} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\neg\mathsf{R}$$

Sequenzen-Kalkül – Aussagenlogik (2)

Enthält die betrachtete Sprache auch das Falsum **F**, so ist noch folgendes Axiom hinzuzufügen:

$$\mathbf{F}, \Gamma \vdash \Delta$$

Bemerkungen:

- Antezedent und Sukzedent werden vollständig symmetrisch behandelt

- Daher jetzt immer Anwendbarkeitskriterium für die Regeln. Ausnahme: Die Schnittregel cut.

- Es ist nicht nötig, beim Rückwärtsbeweis eine Formel zu erraten.

  Die Regeln haben folgende *Unterformel-Eigenschaft*: Tritt eine Formel in der Vorbedingung einer Regel auf, so auch in der Nachbedingung (zumindest als Unterformel).

  Ausnahme: Schnittregel.

Sequenzen-Kalkül – Beispiele

Beispiel: Beweise $A \wedge B \vdash A \vee C$

1. Dies kann so ähnlich geschehen wie im Kalkül des nat. Schließens.

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{A \wedge B \vdash A}\wedge\mathsf{L}}{A \wedge B \vdash A \vee C}\vee\mathsf{R}$$

2. Es ist nicht notwendig, sich auf die Wahl von A oder C festzulegen:

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A, C}{A \wedge B \vdash A, C}\wedge\mathsf{L}}{A \wedge B \vdash A \vee C}\vee\mathsf{R}$$

3. Auch hier können wieder Beweise "mit Umwegen" auftreten:

$$\dfrac{\dfrac{A, C \vdash C}{A \wedge C \vdash C}\wedge\mathsf{L} \quad \dfrac{C \vdash C, B}{C \vdash C \vee B}\vee\mathsf{R}}{A \wedge C \vdash C \vee B}cut$$

Elimination der Schnittregel und Anwendungen

Die Schnittregel cut stört einige wünschenswerten Eigenschaften.

Man kann zeigen, daß die Schnittregel redundant ist und sich jeder Beweis durch Schnittelimination “normalisieren” läßt:

Schnitt-Eliminationssatz (Gentzen):
Jeder Beweis, der einen Schnitt enthält, läßt sich in einen Beweis ohne Schnitt überführen

Dabei kann (!) die Beweislänge über-exponentiell anwachsen.

Anwendungen:
Durch die Unterformeleigenschaft der verbleibenden Regelmenge enthält man Entscheidungsverfahren für die klassische Aussagenlogik.

Sequenzen-Kalkül für Prädikatenlogik

Zu den aussagenlogischen Regeln kommen die folgenden hinzu:

$$\frac{A[x \leftarrow t], \Gamma \vdash \Delta}{\forall\, x.A, \Gamma \vdash \Delta} \forall \mathsf{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x \leftarrow y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall\, x.A} \forall \mathsf{R}$$

$$\frac{A[x \leftarrow y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists\, x.A, \Gamma \vdash \Delta} \exists \mathsf{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists\, x.A} \exists \mathsf{R}$$

Dabei ist jeweils y eine beliebige Variable, t ein beliebiger Term, die folgenden Bedingungen genügen:

- In den Regeln $\forall$ L und $\exists$R darf keine Variable von t von einem Quantor in A gebunden werden ("$variable\ capture$").

  Das heißt, daß t 'frei für x in A' sein muß.

  Notfalls sind gebundene Variablen umzubenennen.

- In $\forall$ R und $\exists$L darf die *Eigenvariable* y nicht frei in der Nachbedingung der Regel vorkommen ("Eigenvariablen-Bedingung")

Beispiele für prädikatenlogische Beweise

1. Beweis der Sequenz $(\forall\ x.P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall\ x.P(x)) \wedge (\forall\ x.Q(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pv \wedge Qv \vdash Pv}{(\forall\ x.Px \wedge Qx) \vdash Pv}\forall\mathsf{L}}{(\forall\ x.Px \wedge Qx) \vdash \forall\ x.Px}\forall\mathsf{R} \quad \dfrac{\dfrac{Pv \wedge Qv \vdash Qv}{(\forall\ x.Px \wedge Qx) \vdash Qv}\forall\mathsf{L}}{(\forall\ x.Px \wedge Qx) \vdash \forall\ x.Qx}\forall\mathsf{R}}{(\forall\ x.Px \wedge Qx) \vdash (\forall\ x.Px) \wedge (\forall\ x.Qx)}\wedge\mathsf{R}$$

2. Beweis der Sequenz $P(a), \forall\ x.(P(x) \Rightarrow P(f(x))) \vdash P(f(f(a)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pa,\ Pa \Rightarrow Pfa,\ Pfa \Rightarrow Pffa \vdash Pffa}{Pa,\ Pa \Rightarrow Pfa,\ (\forall\ x.Px \Rightarrow Pfx) \vdash Pffa}\forall\mathsf{L}}{Pa,\ (\forall\ x.Px \Rightarrow Pfx),\ (\forall\ x.Px \Rightarrow Pfx) \vdash Pffa}\forall\mathsf{L}}{Pa, (\forall\ x.Px \Rightarrow Pfx) \vdash Pffa}\mathit{contr{:}L}$$

Es kann also nötig sein, mehrmals die Kontraktionsregel $contr$ anzuwenden, um eine Sequenz zu beweisen.

3. Beweis für $(\exists\, x\, \forall\ y.P(x,y)) \vdash (\forall\ y\, \exists\, x.P(x,y))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(v,w) \vdash P(v,w)}{P(v,w) \vdash \exists\, x.P(x,w)}\exists\mathsf{R}}{\forall\ y.P(v,y) \vdash \exists\, x.P(x,w)}\forall\mathsf{L}}{\forall\ y.P(v,y) \vdash \forall\ y\, \exists\, x.P(x,y)}\forall\mathsf{R}}{\exists\, x\, \forall\ y.P(x,y) \vdash \forall\ y\, \exists\, x.P(x,y)}\exists\mathsf{L}
$$

Negativ-Beispiele

Die folgenden Beispiele falscher Regelanwendungen motivieren die Bedingungen für die prädikatenlogischen Regeln.

Vermeidung des Bindens freier Variablen:

Man versuche zu beweisen: $\forall\, x.P(x, fx) \vdash \exists\, y \forall\, x.P(x, y)$

Dies ist eine ungültige Sequenz (interpretiere z.B. P als das Prädikat "ist Vorgänger von" auf den ganzen Zahlen, f als die Nachfolger-Funktion).

$$\frac{\forall\, x.P(x, fx) \vdash \forall\, x.P(x, fx)}{\forall\, x.P(x, fx) \vdash \exists\, y \forall\, x.P(x, y)}\exists\mathsf{R}$$

Bei dem Rückwärtsschritt gerät die Variable x in dem Term fx unter den Einfluß des All-Quantors.

Negativ-Beispiele [2]

Eigenvariablenbedingung:

Versuche zu beweisen: $(\forall\, y\, \exists\, x.P(x,y)) \vdash (\exists\, x\, \forall\, y.P(x,y))$

Dies ist eine ungültige Sequenz (interpretiere z.B. P als das Prädikat $\geq$ auf den ganzen Zahlen).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(v,w) \vdash P(v,w)}{\exists\, x.P(x,w) \vdash P(v,w)}\exists\mathsf{L}}{\exists\, x.P(x,w) \vdash \forall\, y.P(v,y)}\forall\,\mathsf{R}}{\forall\, y\, \exists\, x.P(x,y) \vdash \forall\, y.P(v,y)}\forall\,\mathsf{L}}{\forall\, y\, \exists\, x.P(x,y) \vdash \exists\, x\, \forall\, y.P(x,y)}\exists\mathsf{R}$$

Bei diesem Beweis ist in dem Schritt $\forall\ R$ die Eigenvariablenbedingung verletzt (w ist frei in der Nachbedingung der Regel).