

Aufgabe 8-1

Gegeben sei der folgende Datentyp der Binärbäume über natürlichen Zahlen:

```
BinTree : DATATYPE
BEGIN
  empty : empty?
  node(key:nat, left:BinTree, right:BinTree) : node?
END BinTree
```

- a) Definieren Sie Funktionen, die die minimale bzw. maximale Höhe eines Baums berechnen (`minheight`, `maxheight`). Beweisen Sie, dass die minimale Höhe eines Baums immer kleiner oder gleich der maximalen Höhe ist.

Definieren Sie außerdem Funktionen `minval`, `maxval`, die das kleinste bzw. größte Element eines Baums zurückgeben sowie solche, die das am weitesten links bzw. rechts liegende Element eines Baums liefern (`leftmost`, `rightmost`).

- b) Definieren Sie ein Prädikat `sorted?` über diesen Binärbäumen, das genau dann erfüllt ist, wenn für jeden Knoten eines Baumes gilt, dass die Werte im linken Teilbaum kleiner oder gleich dem Knotenwert und die im rechten Teilbaum größer oder gleich diesem Wert sind.

Zeigen Sie, dass das kleinste Element immer das am weitesten links und das größte das am weitesten rechts liegende Element ist.

- c) Definieren Sie eine Funktion `insert`, die in einen sortierten Baum eine weitere Zahl einfügt. Zeigen Sie, dass nach Einfügen der Baum weiterhin sortiert ist.

Vergessen Sie nicht, die entstehenden Typkorrektheitsbedingungen zu zeigen!