

**Hinweis:** Für die Beweise dieser Übungsaufgabe benötigen Sie neue PVS-Beweiserbefehle: (LIFT-IF) und (ASSERT). Lesen Sie sich die zugehörigen Abschnitte sowie auch die zu **Typkorrektheitsbedingungen**, insbesondere zu den **Terminations-TCCs** in der ausgeteilten PVS-Kurzanleitung durch!

## Aufgabe 6-1

Definieren Sie eine rekursive Funktion  $iterate : (nat \rightarrow nat) \times nat \rightarrow (nat \rightarrow nat)$  in PVS, die eine gegebene Funktion  $f$  genau  $n$ -mal iteriert:  $iterate(f, n)(x) = \underbrace{f(\dots f(f(x))\dots)}_{n\text{-mal}}$ :

```
iterate(f:[nat->nat], n:nat) : RECURSIVE [nat -> nat]
```

- a) Beweisen Sie nach der Typprüfung die entstandenen TCCs.
- b) Zeigen Sie ( $\circ$  ist die Funktionskomposition und in PVS bereits vordefiniert):

```
iterate_compose : THEOREM  
(iterate(f,n) o iterate(f,m))(x) = iterate(f,n+m)(x)
```

- c) Zeigen Sie: Die  $m$ -fache Iteration der Funktion  $\lambda x.x + n$  entspricht der Multiplikation  $n \cdot m$ .

```
iterate_add : THEOREM  
iterate((LAMBDA (x): x + n), m)(0) = n * m
```

- d) Durch Iteration welcher Funktion erhält man die Exponentiation  $n^m$ ? Formulieren Sie eine entsprechende Aussage und beweisen Sie diese. (Die Exponentiation  $n^m$  ist in PVS ebenfalls vordefiniert.)

## Aufgabe 6-2

Definieren Sie in PVS eine rekursive Funktion `sum` mit der Signatur

|   |
|---|
| <code>sum(n:nat,m:nat,f:[nat -&gt; nat]) : RECURSIVE nat</code> |
|---|

Dabei soll  $sum(n, m, f)$  die Summe der Funktionswerte von  $f$  zwischen  $n$  und  $m$  bilden:

$$sum(n, m, f) = \sum_{i=n}^m f(i)$$

- a) Beweisen Sie nach der Typprüfung die entstandenen TCCs.
- b) Beweisen Sie in PVS:

$$sum(0, n, \lambda i. i) = \frac{n * (n + 1)}{2}$$

- c) Beweisen Sie in PVS ( $x$  ist von Typ `nat`):

$$\begin{aligned} sum(n, m, \lambda i. x * f(i)) &= x * sum(n, m, f) \\ sum(n, m, \lambda i. f(i + x)) &= sum(n + x, m + x, f) \\ | sum(n, m, f) | &\leq sum(n, m, \lambda i. | f(i) |) \end{aligned}$$

**Hinweis:** Bei der letzten Aussage benötigen Sie vermutlich als Hilfslemma die sogenannte „Dreiecksungleichung“:

$$| x + y | \leq | x | + | y |$$