

Aufgabe 1-1

Geben Sie ein Modell der folgenden Gleichungstheorie an:

$$\Sigma = \{\bullet^{(0)}, \diamond^{(1)}, \heartsuit^{(1)}, \spadesuit^{(2)}, \clubsuit^{(2)}\}, V = \{x, y\}$$

$$\begin{aligned} \diamond(\bullet) &= \heartsuit(\bullet) \\ \diamond(\heartsuit(x)) &= \diamond(x)\clubsuit\heartsuit(x) \\ x\clubsuit\bullet &= \bullet \\ x\clubsuit\heartsuit(y) &= (x\clubsuit y)\spadesuit x \\ x\spadesuit\bullet &= x \\ x\spadesuit\heartsuit(y) &= \heartsuit(x\spadesuit y) \end{aligned}$$

Aufgabe 1-2

Im folgenden bezeichnen a und b Konstantensymbole, f, g und h Funktionssymbole und u, v, w, x, y und z sind Variablen.

Sind folgende Termpaare unifizierbar? Geben Sie ggf. den allgemeinsten Unifikator an.

- a) $f(x, y)$ und $f(h(a), x)$
- b) $f(h(x), b)$ und $f(h(a), y)$
- c) $f(h(a), b)$ und $f(h(x), b)$
- d) $f(z, h(z))$ und $f(h(x), h(b))$
- e) $h(x, g(x, y), z)$ und $h(x, g(a, y), y)$
- f) $f(h(x), g(x, u))$ und $f(z, g(f(y, y), z))$
- g) $g(f(z, g(a, y)), h(z))$ und $g(f(f(u, v), w), h(f(a, b)))$

Aufgabe 1-3

Welche der folgenden Termersetzungssysteme terminieren? Begründen Sie Ihre Antwort (auch informell, nicht notwendigerweise durch Angabe einer Terminationsordnung).

a) $x + f(y) \rightarrow f(x) + y$

b) $f(x) \rightarrow x$
 $x + f(y) \rightarrow f(x) + y$

- c)** $f(x) \rightarrow g(x, x)$
 $g(a, y) \rightarrow f(y)$
 $g(x, a) \rightarrow b$
- d)** $g(0, 1, x) \rightarrow g(x, x, x)$
- e)** $f(g(x)) \rightarrow g(g(f(f(x))))$
- f)** $g(0, 1, x) \rightarrow g(x, x, x)$
 $x + y \rightarrow x$
 $x + y \rightarrow y$

Aufgabe 1-4

Mit folgendem Termersetzungssystem können arithmetische Ausdrücke teilweise vereinfacht werden.

$$\begin{array}{l|l} x * (y + z) \rightarrow (x * y) + (x * z) & 1 * x \rightarrow x \\ (x + y) * z \rightarrow (x * z) + (y * z) & x * 0 \rightarrow 0 \\ x * 1 \rightarrow x & 0 * 0 \rightarrow 0 \end{array}$$

- a) Beweisen Sie die Terminierung mit der rekursiven Pfadordnung (RPO).
- b) Versuchen Sie, obiges Termersetzungssystem zu vervollständigen.
- c) Welches Problem entsteht bei Verwendung der RPO, wenn man noch die Regel $(x * y) * z \rightarrow x * (y * z)$ zu obigem Termersetzungssystem hinzunimmt?

Aufgabe 1-5

Gegeben sei folgendes Termersetzungssystem für die Gruppentheorie:

$$\begin{array}{l} (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ e \cdot x \rightarrow x \\ i(x) \cdot x \rightarrow e \end{array}$$

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der lexikographischen Pfadordnung, daß dieses Termersetzungssystem terminiert.
- b) Vervollständigen Sie das Termersetzungssystem mit dem Knuth-Bendix-Verfahren.